Chapitre 1.5

ENSEMBLES

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Notions de base sur les ensembles.

Table des matières

I ENSEMBLES, ÉLÉMENT

La notion d'ensemble est une notion première dans le formalisme moderne des mathématiques. On ne cherchera donc pas à en donner une définition précise, et on s'en tiendra à une notion « intuitive ».

DÉFINITION 1

Un **ensemble** est une collection d'objets (réels, entiers, fonctions, ...), appelés **élements**.
$x \in E$ se lit « x appartient à E » : cela signifie que x est un élément de l'ensemble E.
$x \notin E$ se lit « x n'appartient pas à E » : cela signifie que x n'est pas un élément de l'ensemble E.

EXEMPLES 1. On connait les ensembles usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. On peut en construire d'autres de plusieurs façons :

- en explicitant tous ses éléments (en extension) : $A = \{0,1\}$; $B = \{1,2,...,500\}$, noté aussi $[\![1,500]\!]$.
- en précisant une propriété caractéristique de ses éléments (en compréhension) :
  Pour deux réels a et b, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$, et est noté $[a,b]$.
- comme l'ensemble des valeurs prises par une expression dépendant d'un paramètre :
  $C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des valeurs prises par $2n$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels pairs. On le note parfois $2\mathbb{N}$.

EXEMPLES 2. Voici d'autres exemples ou notations classiques :

- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ et son pendant négatif $\mathbb{R}_-$.
- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ et de même pour $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ et l'ensemble des nombres dits décimaux $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- Il existe un (unique) ensemble ne contenant aucun élément : c'est **l'ensemble vide**, noté $\varnothing$.

Il est important de bien mettre des $\{$*accolades*$\}$. Par ailleurs, contrairement aux listes Python, un ensemble ne tient pas compte des répétitions ni de l'ordre de ses éléments : ainsi $\{1,2,1\} = \{1,2\} = \{2,1\}$.

DÉFINITION 2

Soient E et F deux ensembles.

- E est dit un **singleton** s'il ne contient qu'un seul élément.
- Un ensemble est dit **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Sinon, il est dit **infini**.
- E et F sont dits égaux, et on note $E = F$, si E et F ont les mêmes éléments.
- E est **inclus** dans F, et on note $E \subset F$, si $\forall x \in E \quad x \in F$. On dit également que E est un **sous-ensemble** ou une **partie** de F.

EXEMPLE 3. Pour tout ensemble E, on a $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$ (ceci sera justifié en partie III).
Pour tout $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est aussi une partie de E.

REMARQUE. **Attention !** On prendra garde à ne pas confondre l'élément x de E et la partie $\{x\}$ de E. Le premier appartient à E : $x \in E$, le second est inclus dans E : $\{x\} \subset E$.

PROPOSITION 3

Soient A, B et C trois ensembles.

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

$$\big(A \subset B \text{ et } B \subset C\big) \implies A \subset C$$

DÉFINITION 4

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Autrement dit $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

EXEMPLE 4. Si $E = \{1,2\}$ on a $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$. Attention $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \neq \varnothing$!

DÉFINITION 5

- Étant donnés x et y deux objets mathématiques quelconques (par exemple x est un réel et y une suite...), on définit un nouvel objet mathématique, le **couple** (x, y).
  Deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si $x = x'$ et $y = y'$.
- On définit de même les **triplets** (x, y, z), **quadruplets** (x, y, z, t), et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des **n-uplets** $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Deux n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont égaux si $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = y_i$.
- A et B étant deux ensembles, on note $A \times B$ l'ensemble des couples (a, b), où $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble est appelé **produit cartésien de** A **et** B.
- Plus généralement, étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles, le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, ..., a_n)$, où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \in A_i$.

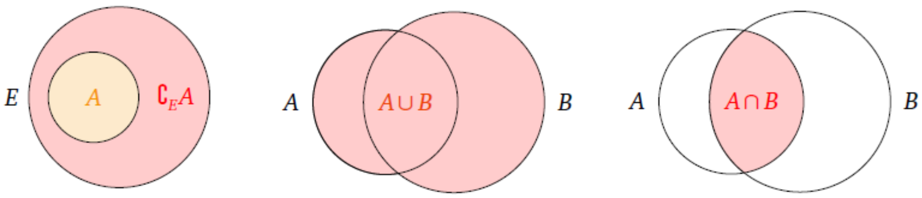
REMARQUE. Attention, les n-uplets tiennent compte de l'ordre : $(1,2) \neq (2,1)$.
On note généralement $A^2 := A \times A$, d'où les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ déjà rencontrés.
Ne pas confondre $\big\{(1,2)\big\}$, qui est un singleton, et l'ensemble $\big\{1,2\big\}$ qui contient deux éléments.

II Opérations sur les ensembles

DÉFINITION 6

Soient A, B, E trois ensembles avec $A, B \subset E$.

- **Intersection** $\cap$ **:** $A \cap B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\big\}$.
- **(Ré)union** $\cup$ **:** $A \cup B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\big\}$. Pour rappel le « ou » est inclusif (cf dessin).
- **Différence :** $A \setminus B = \big\{x \in A \mid x \notin B\big\}$.
- **Complémentaire :** $E \setminus A = \complement_E A = \big\{x \in E \mid x \notin A\big\}$. Si aucune ambiguité, on note parfois $\complement A$, A^c ou $\overline{A}$.



EXEMPLES 5.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.
- $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_- = x \in \mathbb{R} \mid x > 0$ et idem pour $\mathbb{R}_-^*$.

PROPOSITION 7

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
- $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \subset B \iff A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambigüité)
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \subset B \iff A \cup B = B$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$ et $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Démonstration. Soit $x \in E$. On reformule les énoncés grâce à la correspondance logique-ensemble ci-dessous :

Ensemble	$(x \in E)$	Logique
$x \in A \cup B$		$x \in A$ ou $x \in B$
$x \in A \cap B$		$x \in A$ et $x \in B$
$x \in \overline{A}$	équivaut à	non$(x \in A)$
$A \subset B$		$x \in A \implies x \in B$
$A = B$		$x \in A \iff x \in B$

□

DÉFINITION 8

Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.
Une **partition** d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de E vérifiant :

- $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, ou encore $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

III Un peu de logique

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble quelconque. Par convention :

- « $\forall x \in \varnothing \quad P(x)$ » est toujours *vrai*.
- « $\exists x \in \varnothing \quad P(x)$ » est toujours *faux*.

C'est cette convention qui fait que $\varnothing \subset E$ pour tout ensemble E. Elle entraine aussi le fait que « Faux $\Longrightarrow$ ... » est vrai : pour deux propositions P et Q dépendant d'une variable x dans E :

$$\left(\forall x \in E \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{x \in E \mid P(x)\right\} \subset \left\{x \in E \mid Q(x)\right\}$$

Ainsi, si $P(x)$ est fausse pour tout x de E, l'inclusion de droite se réécrit « $\varnothing \subset ...$ », ce qui est toujours vrai.